IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Miércoles 8 de mayo de 2002 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (*p. ej.*, Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente ***ningún*** *punto.*

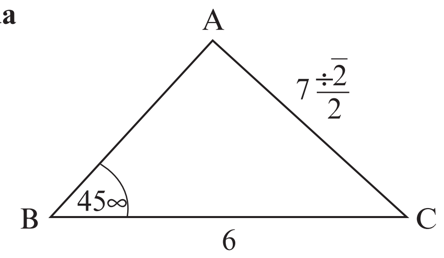
SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 10]*

En la figura aparece un triángulo ABC en el cual $AC = 7\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC = 6$, $A\hat{B}C = 45°$.

figura no dibujada a escala



(a) Tomando en cuenta que sen $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, muestre que sen $B\hat{A}C = \frac{6}{7}$. *[2 puntos]*

El punto D está sobre (AB), entre A y B, y es tal que sen $B\hat{D}C = \frac{6}{7}$.

(b) (i) Escriba el valor de $B\hat{D}C + B\hat{A}C$.

(ii) Calcule el ángulo BCD.

(iii) Halle la longitud de [BD]. *[6 puntos]*

(c) Muestre que $\frac{\text{Área de } \Delta BDC}{\text{Área de } \Delta BAC} = \frac{BD}{BA}$. *[2 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

Rosa y Clara son nadadoras y se están entrenando para una competición.

(a) Rosa se entrena 12 horas durante la primera semana. Decide aumentar el tiempo que dedica al entrenamiento en 2 horas cada semana. Halle el total de horas que dedica al entrenamiento durante las primeras 15 semanas. *[3 puntos]*

(b) También Clara se entrena 12 horas durante la primera semana. Decide entrenarse cada semana un 10% más que la semana anterior.

(i) Muestre que durante la tercera semana se entrena 14,52 horas.

(ii) Halle el total de horas que dedica al entrenamiento durante las primeras 15 semanas. *[4 puntos]*

(c) ¿Durante que semana superará el tiempo dedicado por Clara al entrenamiento, por primera vez, las 50 horas? *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 19]*

Tres de las coordenadas del paralelogramo STUV son $\mathrm{S}(-2,-2)$, $\mathrm{T}(7,7)$, $\mathrm{U}(5,15)$.

(a) Halle el vector $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ y a partir de allí las coordenadas de V. *[5 puntos]*

(b) Halle una ecuación vectorial de la recta (UV) de la forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \lambda\boldsymbol{d}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$. *[2 puntos]*

(c) Muestre que el punto E, de vector de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ está sobre la recta (UV) y halle el valor de λ para este punto. *[2 puntos]*

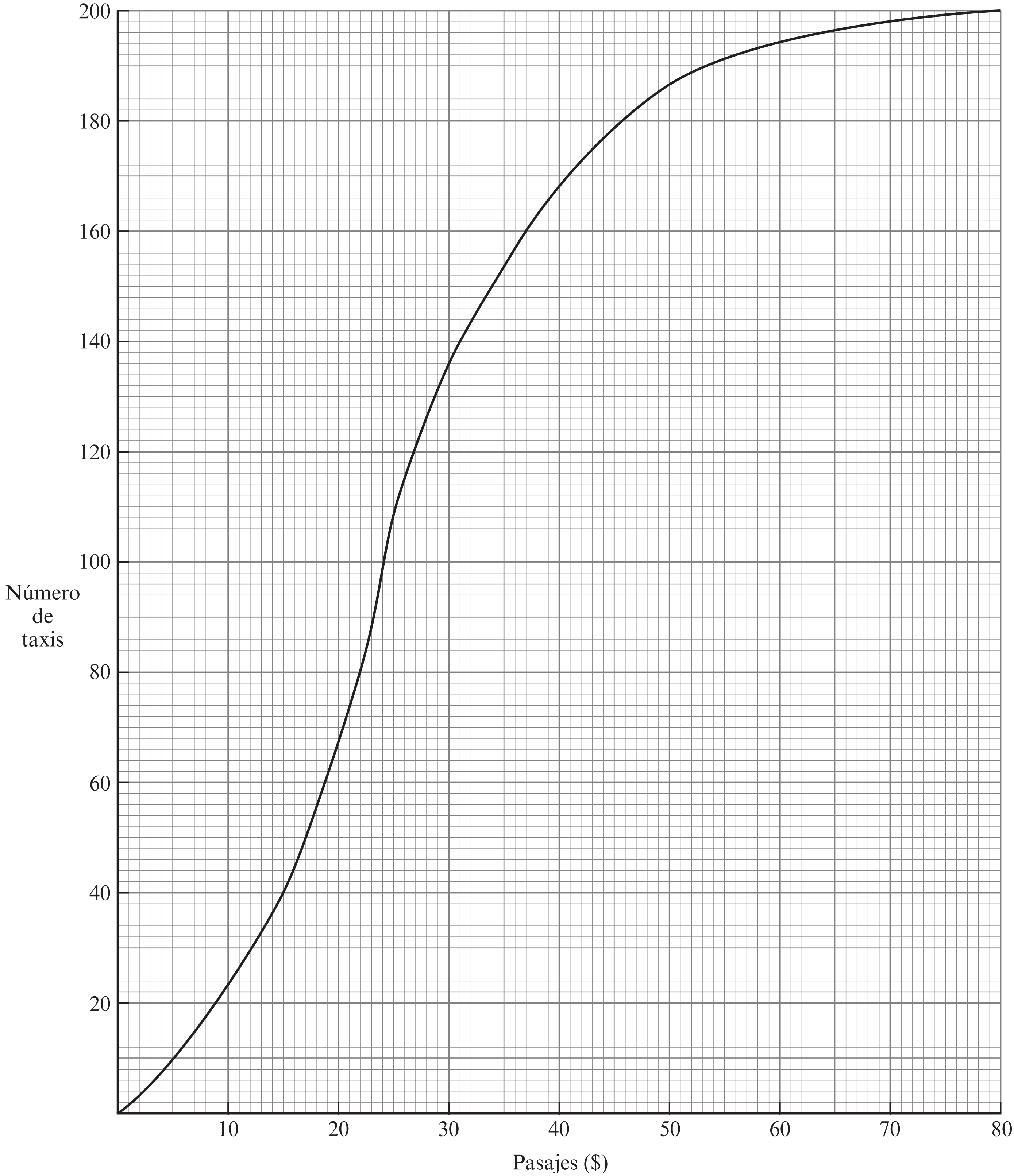
El punto W tiene vector de posición $\begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

(d) (i) Si $|\overrightarrow{\mathrm{EW}}| = 2\sqrt{13}$, muestre que uno de los valores de a es -3, y halle el otro valor posible de a.

(ii) Para $a = -3$, calcule el ángulo entre $\overrightarrow{\mathrm{EW}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$. *[10 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(i) Una empresa tiene 200 taxis. La curva de frecuencias acumuladas a continuación muestra los pasajes, en dólares ($), cobrados por los taxis en una mañana en particular.



(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 4(i) continuación)

(a) Use la curva para estimar:

(i) la mediana de los pasajes;

(ii) el número de taxis cuyo pasaje es de \$35 o menos. *[2 puntos]*

La empresa cobra 55 centavos por kilómetro de distancia recorrida. No hay ningún otro cargo. Use la curva para contestar las preguntas que siguen.

(b) La distancia recorrida esa mañana por el 40% de los taxis es de menos de a km. Halle el valor de a. *[4 puntos]*

(c) ¿Qué porcentaje de los taxis recorre más de 90 km esa mañana? *[4 puntos]*

(ii) Se arrojan dos dados buenos y se anota el número que muestra cada uno. La suma de estos dos números es S. Halle la probabilidad de que

(a) S sea menor que 8; *[2 puntos]*

(b) en al menos uno de los dados aparezca un 3; *[2 puntos]*

(c) en al menos uno de los dados aparezca un 3, dado que S es menor que 8. *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

Tomemos funciones de la forma $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

(a) Muestre que $\int_0^1 \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}(1 - \mathrm{e}^{-k})$. *[3 puntos]*

(b) Sea $k = 0{,}5$

(i) Dibuje la gráfica de $y = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$, para $-1 \le x \le 3$ e indique las coordenadas de su intersección con el eje de las y.

(ii) Sombree la región encerrada por esta gráfica, el eje de las y, el eje de las x y la recta $x = 1$.

(iii) Halle el área de esta región. *[5 puntos]*

(c) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en función de k, siendo $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

El punto P$(1, 0{,}8)$ yace sobre la gráfica de la función $y = \mathrm{e}^{-kx}$.

(ii) Halle el valor de k para este caso.

(iii) Halle el gradiente de la tangente a la curva en P. *[5 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) La masa de los paquetes de un cereal para el desayuno tiene distribución normal, con una media de 750 g y una desviación típica de 25 g.

(a) Halle la probabilidad de que un paquete elegido en forma aleatoria tenga una masa de

(i) menos de 740 g ;

(ii) al menos 780 g ;

(iii) entre 740 g y 780 g . *[5 puntos]*

(b) Se eligen dos paquetes al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos paquetes tengan una masa inferior a 740 g ? *[2 puntos]*

(c) El 70% de los paquetes tiene una masa superior a x gramos. Halle el valor de x . *[2 puntos]*

(ii) Tres escuelas de la misma ciudad inscriben estudiantes para un examen en el cual los alumnos que lo aprueban pueden lograr una de tres notas: *Aprobado*, *Notable*, *Sobresaliente*. Los resultados aparecen en la tabla siguiente:

	Aprobado	*Notable*	*Sobresaliente*
Escuela A	8	22	40
Escuela B	12	45	53
Escuela C	11	29	20

Se puede suponer que el resultado obtenido por un estudiante es independiente de la escuela a la cual haya asistido.

(a) La tabla siguiente da las frecuencias esperadas para los datos anteriores:

	Aprobado	*Notable*	*Sobresaliente*
Escuela A	a	b	33,0
Escuela B	c	d	51,8
Escuela C	7,75	24,0	28,3

(i) Calcule los valores de a , b , c , d .

(ii) Halle χ^2 para estos datos. *[7 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6 (ii) continuación)

(b) Algunos diarios desean usar estos resultados para comparar entre escuelas. Basándose en el valor de χ^2, decida si se justifica la afirmación que dice 'el éxito obtenido en el examen depende de la escuela a la cual se ha asistido'. Analice esta afirmación

(i) con nivel de significación del 5% ;

(ii) con nivel de significación del 10% . *[4 puntos]*

(iii) Una científica está investigando cómo varía la longitud de una varilla metálica con la temperatura. Lee la longitud, y mm, a distintas temperaturas x °C. A partir de un conjunto de estas lecturas calcula los siguientes resultados:

$\overline{x} = 200$, $\overline{y} = 1000$, $s_x = 2{,}31$, $s_y = 11{,}7$, $s_{xy} = 26{,}1$

(a) Halle

(i) el coeficiente de correlación producto-momento, r ;

(ii) la ecuación de la recta de regresión de y sobre x ;

(iii) la longitud de la varilla a una temperatura de 170°C. *[8 puntos]*

(b) ¿Cuál de los diagramas siguientes se parece más al conjunto de lecturas recopiladas por la científica? Justifique su respuesta. *[2 puntos]*

Diagrama A

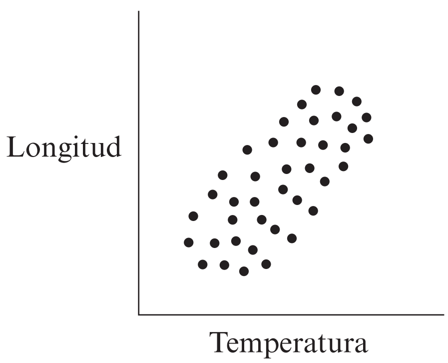


Diagrama B

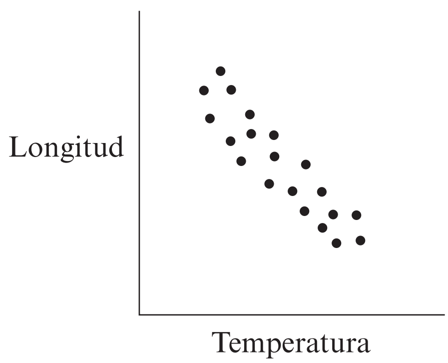


Diagrama C

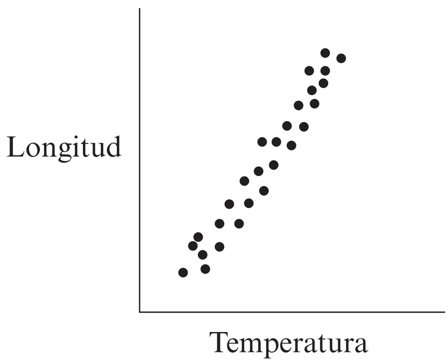
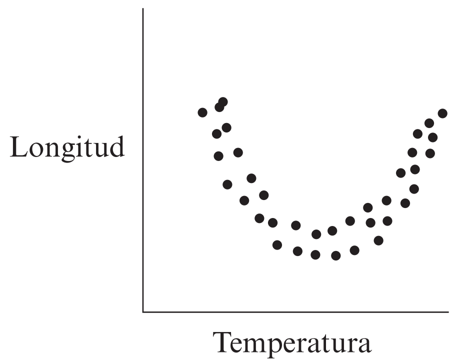


Diagrama D



Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Utilizando la sustitución $u = \cos x$ o de otra manera, halle $\int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x$. *[3 puntos]*

(b) **A partir de aquí**, halle el área entre la gráfica de $y = \operatorname{sen}^3 x$, y el eje de las x, entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$. *[2 puntos]*

(ii) Sea la función f, definida por $f(x) = \frac{2}{1+x^3}$, $x \neq -1$.

(a) (i) Escriba la ecuación de la asíntota vertical de la gráfica de f.

(ii) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de f.

(iii) Dibuje la gráfica de f en el dominio $-3 \leq x \leq 3$. *[4 puntos]*

(b) (i) Usando el hecho de que $f'(x) = \frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$, muestre que la derivada segunda es $f''(x) = \frac{12x(2x^3-1)}{(1+x^3)^3}$.

(ii) Halle las abscisas x de los puntos de inflexión de la gráfica de f. *[6 puntos]*

(c) La tabla siguiente da algunos valores de $f(x)$ y $2f(x)$.

x	$f(x)$	$2f(x)$
1	1	2
1,4	0,534188	1,068376
1,8	0,292740	0,585480
2,2	0,171703	0,343407
2,6	0,107666	0,215332
3	0,071429	0,142857

(i) Use la regla del trapecio con cinco subintervalos para hallar la aproximación de la integral $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

(ii) Dado que $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 0{,}637599$, use un diagrama para explicar por qué su respuesta es un valor superior a éste. *[5 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7 continuación)

(iii) Sea $h(x) = \ln 2x - \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right),\ x > 0$

(a) Muestre que $h(x) = 0$ tiene una raíz entre 0,5 y 1 . *[3 puntos]*

(b) La ecuación $h(x) = 0$ se puede escribir de la forma $x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

Sea $g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}$

(i) Aplicando la fórmula iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ con valor inicial $x_0 = 1$

(a) escriba x_1 y x_2 ;

(b) halle la solución de $h(x) = 0$ con **seis** cifras significativas.

(ii) Halle $g'(x)$ y a partir de allí muestre que, para cualquier valor inicial x_0, la ecuación $x_{n+1} = g(x_n)$ dará siempre la raíz de $h(x) = 0$. *[7 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) $\boldsymbol{R}_1$ y $\boldsymbol{R}_2$ son rotaciones antihorarias de 45° y 60° respectivamente alrededor del origen. Escriba las matrices $\boldsymbol{R}_1$ y $\boldsymbol{R}_2$, usando valores **exactos**. *[4 puntos]*

(b) (i) ¿Qué transformación representa la composición $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$?

(ii) A partir de esto, muestre que $\cos 105° = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. *[5 puntos]*

(ii) Una transformación lineal $\boldsymbol{P}$ aplica el punto $(1, 0)$ en $(1, 6)$ y el punto $(0, 1)$ en $(3, 4)$.

(a) Escriba la matriz de $\boldsymbol{P}$. *[1 punto]*

(b) Halle la imagen de cada uno de los punos $(1, 2)$ y $(-1, 1)$ bajo $\boldsymbol{P}$. *[3 puntos]*

(c) A partir de allí, o de otra manera, halle las ecuaciones de las dos rectas que son invariantes bajo $\boldsymbol{P}$. *[4 puntos]*

(d) Halle el factor escala del área para la transformación $\boldsymbol{P}$. *[2 puntos]*

(iii) Una transformación $\boldsymbol{T}$ que representa la reflexión en la recta l es descrita por

$$\boldsymbol{T}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle la imagen de cada uno de los puntos siguientes bajo $\boldsymbol{T}$

(i) $(0, 0)$;

(ii) $(8, -2)$;

(iii) $(2, -9)$. *[5 puntos]*

(b) Muestre en un diagrama los puntos de la parte (a) y sus imágenes.

(c) A partir de aquí, o de otra manera, halle la ecuación de l de la forma $ax + by + c = 0$, para a, b, $c \in \mathbb{Z}$. *[6 puntos]*